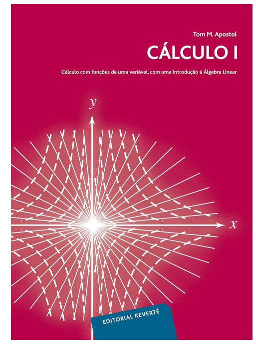
Resolução de Problemas do Livro

Cálculo: Volume I (Apostol, T. M.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
APOSTOL, T. M.. **Cálculo**: Volume I. México, Editorial Reverté, 2001.

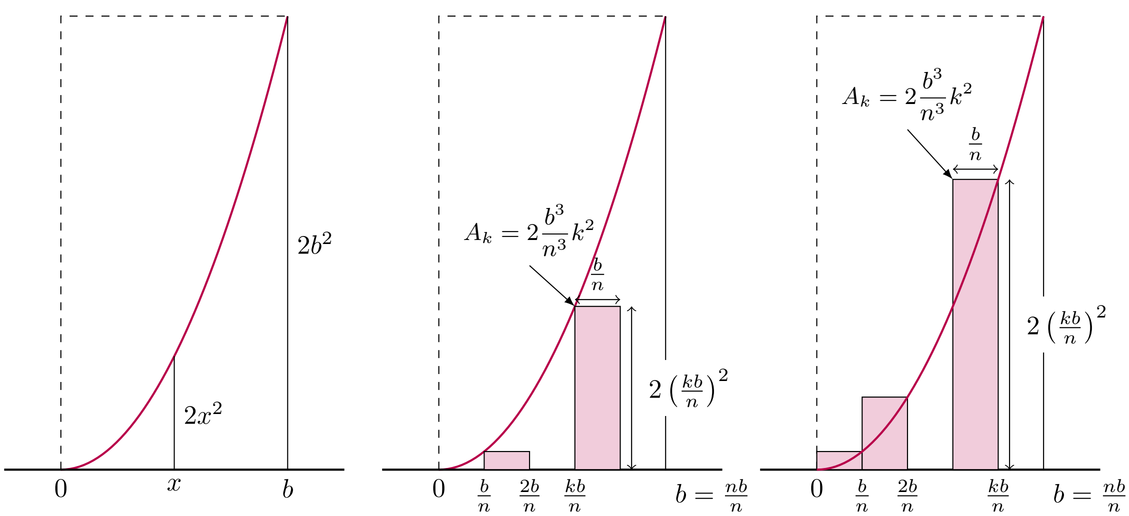
Capítulo I: Introdução

I 1.4 Exercícios - p. 9

1. (a) Modificar a região na figura I.3 tomando como ordenada para cada x o valor $2x^2$ em vez de x^2. Desenhar a nova figura. Seguindo neste caso os passos principais de desenvolvimento anterior e comparando ambos, estudando a repercussão da mudança no cálculo de A.

Solução:

Figure 1: Cálculo da área do segmento parabólico mediante aproximação por falta e por excesso



(a) $y = 2x^2$ (b) Por falta (c) Por excesso

(a) Consideremos um segmento parabólico da função $y = 2x^2$ no intervalo $[0, b]$. Dividimos esse intervalo em n segmentos de comprimento $\dfrac{b}{n}$. Sobre tais segmentos, construímos retângulos inferiores à parábola. Assim, o $k-$ésimo segmento terá altura igual a $2\left(\dfrac{kb}{n}\right)^2$ e área :

$$A_k = 2\frac{b^3}{n^3}k^2$$

em que $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Dessa forma, somando todos os retângulos inferiores, obtemos a aproximação por falta s_n para a área do segmento parabólico:

$$\begin{aligned} s_n &= 2\frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + (n-1)^2\right] \\ &= 2\frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \\ &= \frac{2b^3}{3} - \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{3n^2} \end{aligned}$$

Analogamente, ao aproximar a área do segmento parabólico por retângulos exteriores, obtemos o seguinte somatório:

$$\begin{aligned} S_n &= 2\frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + (n-1)^2\right] \\ &= 2\frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \\ &= \frac{2b^3}{3} + \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{3n^2} \end{aligned}$$

Note-se que a desigualdade

$$s_n < \frac{2b^3}{3} < S_n$$

deve ser válida para cada valor de n, donde concluímos que a área do segmento parabólico $[0, b]$ da função $y = 2x^2$ deve ser $A = \dfrac{2b^3}{3}$.

$\blacksquare$

I 4.4 Exercícios - p. 44

1. Demonstrar por indução as fórmulas seguintes:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$

Solução:
Seja S o conjunto de inteiros positivos que possuem a propriedade

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

i. Evidentemente, o número 1 percente ao conjunto S.

ii. *Hipótese de Indução (HI):* Consideremos que o inteiro k pertença a S, ou seja, $P(k)$ é verdadeira:

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

iii. Analisemos se $k + 1 \in S$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Note que, $P(k)$ é verdadeira implica que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio da Indução, todo inteiro positivo pertence ao conjunto S, ou seja, $P(n)$ definida acima é válida para todo inteiro positivo. ■

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Solução:
Seja a propriedade

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

i. $P(1)$ é verdadeira, visto que $1 = 1^2$.

ii. *Hipótese de Indução (HI):* Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum inteiro positivo k, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

iii. Analisemos se $P(k+1)$ é verdadeira:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2 &\Rightarrow [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)] + [2(k+1) - 1] = k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = k^2 + 2k + 1 \\ &\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2 \end{aligned}$$

Note que, ao considerar $P(k)$ verdadeira, chegamos à conclusão de que $P(k+1)$ também é verdadira. Porttanto, pelo Princípio da Indução, a propriedade dada é verdadeira para todo inteiro positivo. ■

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

Solução:
Seja a propriedade
$$P(n) : 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

i. $P(1)$ é verdadeira pois $1^3 = 1^2 = 1$
ii. *Hipótese de Indução:* Consideremos que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro k, ou seja,
$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$$
iii. Analisemos o caso para $k + 1$:
$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 &\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4} \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4k + 4\right]}{4} \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \\
&\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2
\end{aligned}$$

■

(d) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

Solução:

■