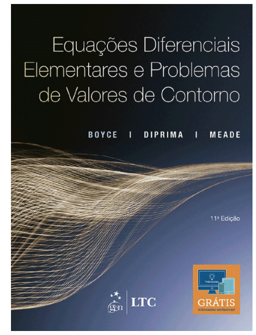
Resolução de Problemas do Livro

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno (Boyce, W.; DiPrima, R. C.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro, LTC, 2020.

Capítulo 1: Introdução

PROBLEMAS

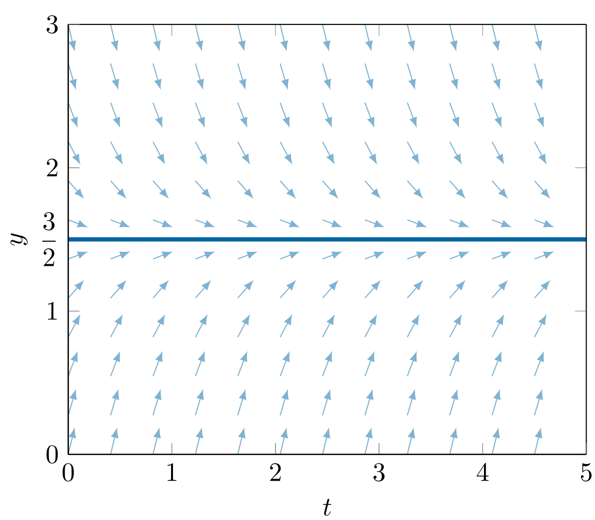
Em cada um dos Problemas 1 a 4, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se este comportamento depende o valor inicial de y e $t = 0$, descreva essa dependência.

1. $y' = 3 - 2y$

Solução:
Solução de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 3 - 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = \frac{3}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, $y \to y^* = \dfrac{3}{2}$ quando $t \to +\infty$, independente do valor inicial quando $t = 0$.



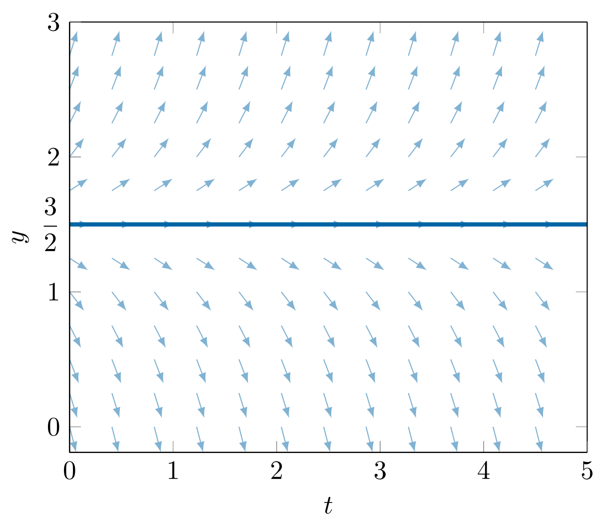
■

2. $y' = 2y - 3$

Solução:
Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 2y^* - 3 = 0 \Rightarrow y^* = \frac{3}{2}$$

Nesse caso, y afasta-se da solução de equilíbrio, independentemente do valor inicial de y quando $t = 0$. Como indica o campo de direções abaixo, $y \to -\infty$ para $y(t=0) < \frac{3}{2}$ e $y \to +\infty$ para $y(t=0) > \frac{3}{2}$.

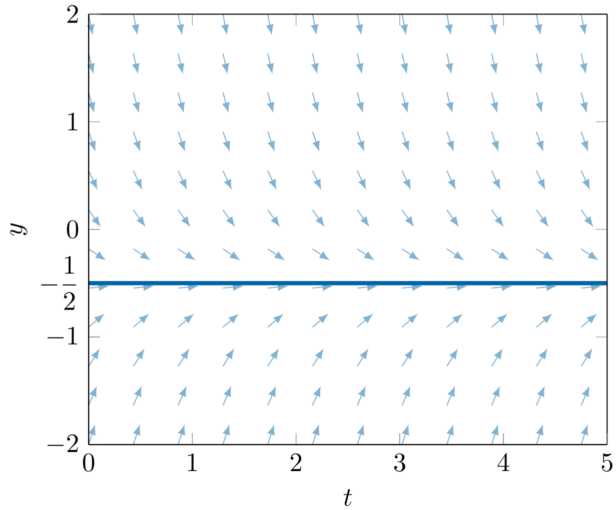


3. $y' = -1 - 2y$

Solução:
Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow -1 - 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem ao valor de equilíbrio $y^* = -\frac{1}{2}$ quando $t \to \infty$, independentemente do valor inicial quando $t = 0$.



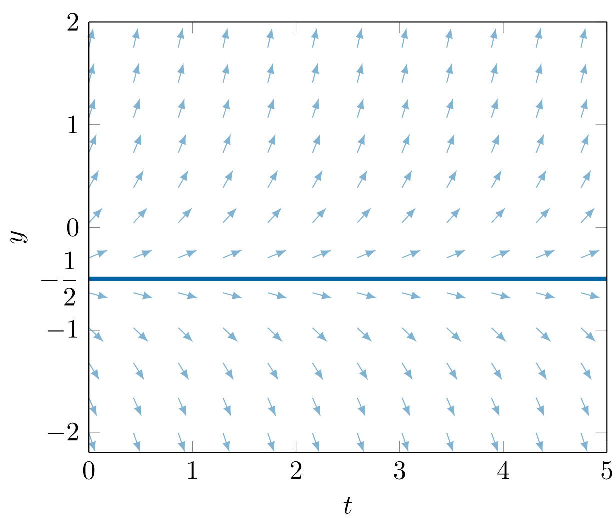
■

4. $y' = 1 + 2y$

Solução:
Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 1 + 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}$$

Nesse caso, y afasta-se da solução de equilíbrio, independentemente do valor inicial de y quando $t = 0$. Como indica o campo de direções abaixo, $y \to -\infty$ para $y(t = 0) < -\frac{1}{2}$ e $y \to +\infty$ para $y(t = 0) > -\frac{1}{2}$.



■

Em cada um dos Problemas 5 e 6, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento pedido quando $t \to \infty$.

5. Todas as soluções se aproximam de $y = 2/3$.

Solução:
Consideremos eqações diferenciais na forma $y' = ay + b$. A solução de equilíbrio (y^*) é dada por:

$$\frac{dy}{dt}(y^*) \equiv 0 \Rightarrow ay^* + b = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{b}{a}$$

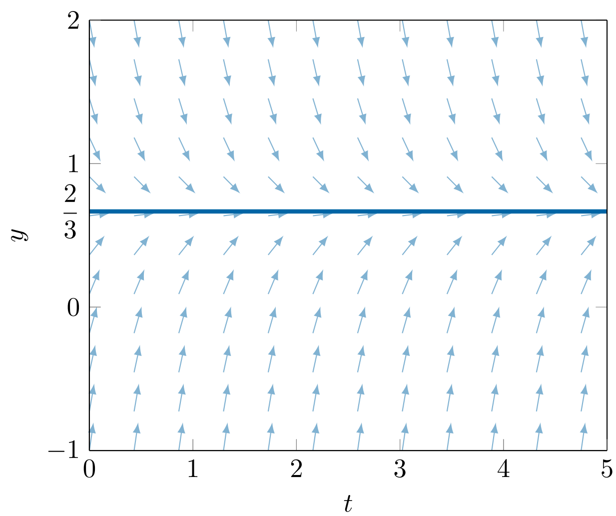
Por outro lado, para determinarmos se as soluções aproximan-se ou afastam-se de y^* quando $t \to \infty$, devemos observar o sinal de $\frac{dy'}{dy}$ em y^*. Se $\frac{dy'}{dy}(y^*) < 0$, as soluções tendem à solução de equilíbrio depois de um longo tempo. Caso, $\frac{dy'}{dy}(y^*) > 0$, as soluções afastam-se. Portanto, para resolver o problema em questão, temos as seguintes condições:

$$\begin{cases} y^* = -\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{dy'}{dy}(y^*) = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{3} \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2}{3}a \\ a < 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = -3$ e $b = 2$, obtemos uma equação possível satisfazendo às condições acima:

$$y' = 2 - 3y$$

O campo de direções pe mostrado abaixo:



6. Todas as soluções se afastam de $y = 2$.

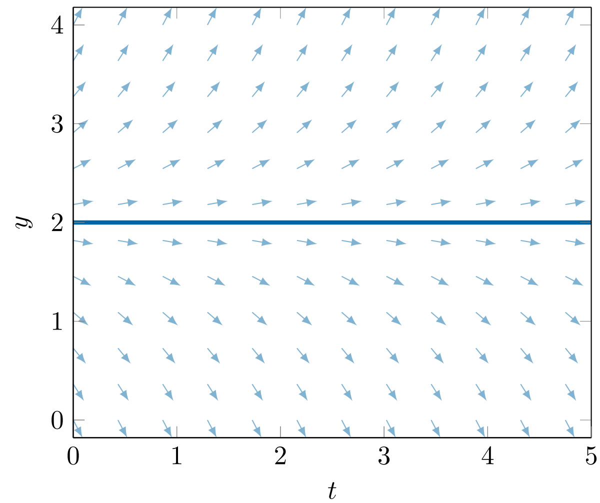
Solução:
Nesse caso, devemos ter:

$$\begin{cases} y^* = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ \dfrac{dy'}{dy}(y^*) = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -2 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a > 0 \end{cases}$$

Uma equação possível satisfazendo às condições acima é

$$y' = -2 + y$$

O campo de direções pe mostrado abaixo:

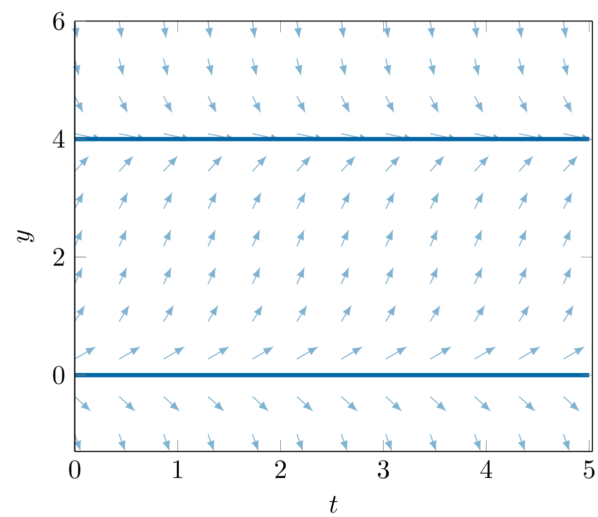


Em cada um dos Problemas 7 a 19, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quanto $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que, nesses problemas, as equações diferenciais não são da forma $y' = ay+b$, e o comportamento das soluções é um pouco mais complicado que o das soluções das equações do texto.

7. $y' = y(4 - y)$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow y(4 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = 4 \end{cases}$$



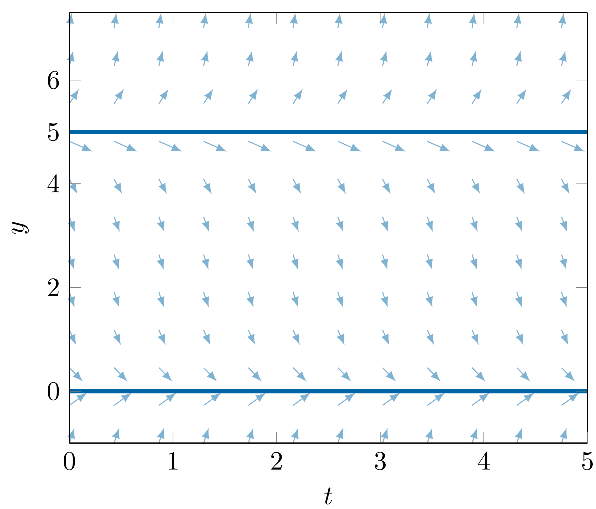
A solução $y^* = 0$ é instável, no sentido que para condições iniciais próximas, as soluções para afastam-se dela com o passar do tempo. Por outro lado, a solução $y^* = 4$ é estável, ou seja, soluções póximas de y^* tendem para ela após algum tempo. Observando o campo de direções acima, concluímos que:

- Para $y(t=0) < 0$, as as soluções tendem a $-\infty$;
- Para $0 < y(t=0) < 4$, as soluções afastam-se de $y=0$ e crescem, aproximando-se de $y=4$;
- Para $y(t=0)40$, as soluções decrescem, aprosimando-se de $y=4$.

8. $y' = -y(5-y)$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow -y(5-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = 5 \end{cases}$$



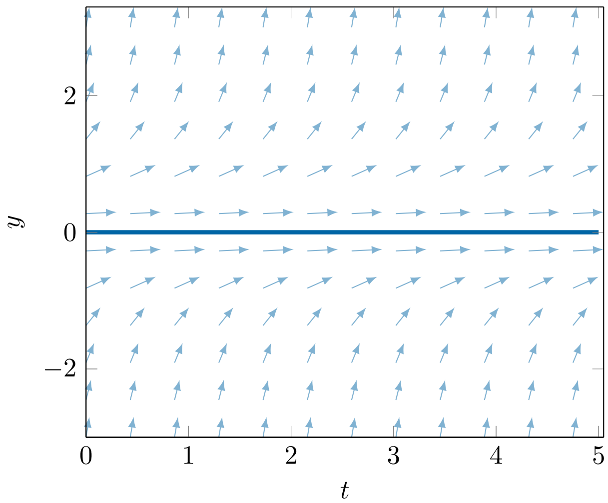
A solução de equilíbrio $y^* = 0$ é estável enquanto $y^* = 5$ é instável. Observando o campo de direções acima, concluímos que:

- Para $y(t=0) < 0$, as as soluções crescem, aproximando-se de $y^* = 0$;
- Para $0 < y(t=0) < 5$, as soluções afastam-se de $y=5$ e diminuem, aproximando-se de $y^* = 0$;
- Para $y(t=0) > 5$, as soluções crescem indefinidamente.

9. $y' = y^2$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y^* = 0$$

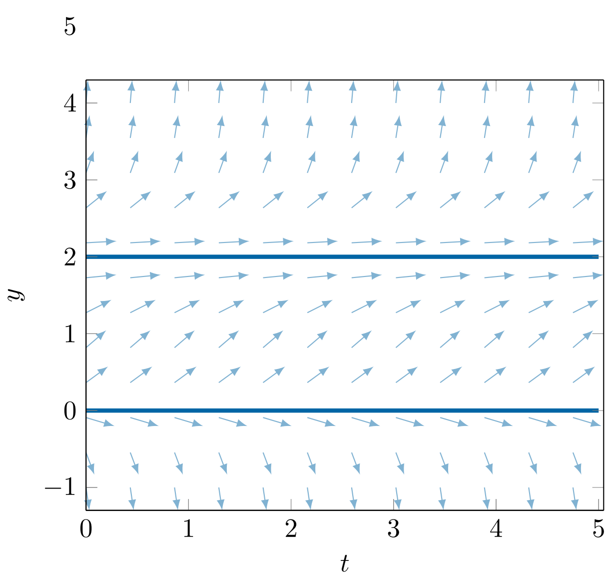


Para $y(t = 0) < y^* = 0$, as soluções crescem aprosimando-se desta solução de equilíbrio. Por outro lado, para $y(t = 0) > y^* = 0$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio, crescendo indefinidamente. ■

10. $y' = y(y-2)^2$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow y(y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = 2 \end{cases}$$



Observando o campo de direções acima, concluímos que:

- Para $y(t=0)<0$, as as soluções decrescem indefinidamente, afastando-se de $y^*=0$;
- Para $0<y(t=0)<2$, as soluções afastam-se de $y=0$ e crescem, aproximando-se de $y^*=2$;
- Para $y(t=0)>2$, as soluções crescem indefinidamente.

Considere a lista a seguir de equações diferenciaisi, algumas das quais produziram os campos de direção ilustrados nas Figuras 1.1.5 a 1.1.0. Em cada um dos Problemas 11 a 16, identifique a equação diderencial que corresponde ao campo de direções dados.

a. $y'=2y-1$

b. $y'=2+y$

c. $y'=y-2$

d. $y'=y(y+3)$

e. $y'=y(y-3)$

f. $y'=1+2y$

g. $y'=-2-y$

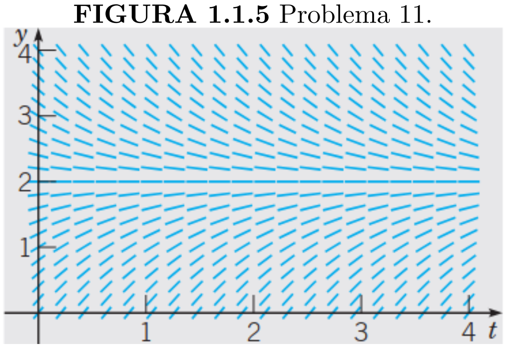
h. $y'=y(3-y)$

i. $y'=1-2y$

j. $y'=2-y$

11. O Campo de direções na Figura 1.1.5.

FIGURA 1.1.5 Problema 11.



Solução:

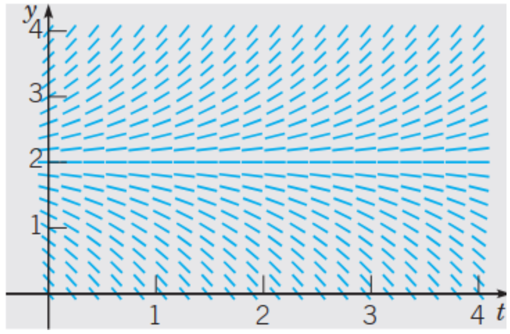
A figura mostra um campo de direções com apenas uma solução estacionária em $y^*=2$. Observemos que é uma solução estável, visto que as demais soluções tendem à ela com o passar do tempo.

Lembremos que no gráfico $y\times t$, a inclinação da linhas de campo indicam o sinal da primeira derivada y'. Com isso em mente, observemos que para $y>y^*$, as linhas de campo têm inclinação negativa e que para $y<y^*$, as linhas de campo têm inclinação positiva. Assim, $y'<0$ para $y>y^*$ e $y'>0$ para $y<y^*$. Esse padrão de comportamento é encontrado em:

$$\textbf{j. } y'=2-y$$

12. O campo de direções na Figura 1.1.6.

FIGURA 1.1.6 Problema 12.



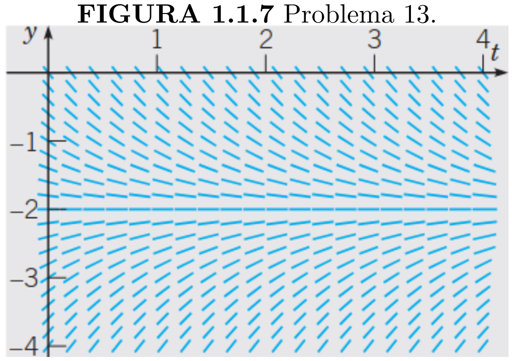
Solução:
Nesse caso, temos uma solução estacionária instável em $y^* = 2$. A partir da análise da inclinação das linhas de campo, que $y' > 0$ para $y > y^*$ e que $y' < 0$ para $y < y^*$. Esse comportamento é encontrado em:

$$\mathbf{c.}\ y' = y - 2$$

■

13. O campo de direções na Figura 1.1.7.

FIGURA 1.1.7 Problema 13.



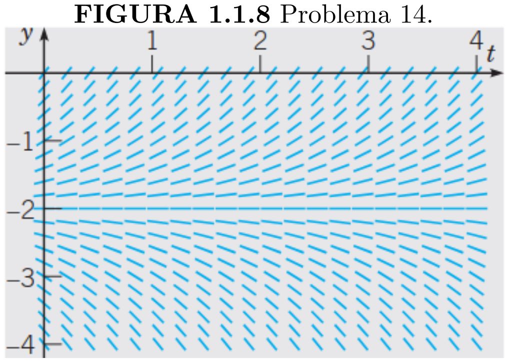
Solução:
Nesse caso, temos uma solução estacionária estável em $y^* = -2$. A partir da análise da inclinação das linhas de campo, que $y' < 0$ para $y > y^*$ e que $y' > 0$ para $y < y^*$. Esse comportamento é encontrado em:

$$\mathbf{g.}\ y' = -2 - y$$

■

14. O campo de direções na Figura 1.1.8.

FIGURA 1.1.8 Problema 14.



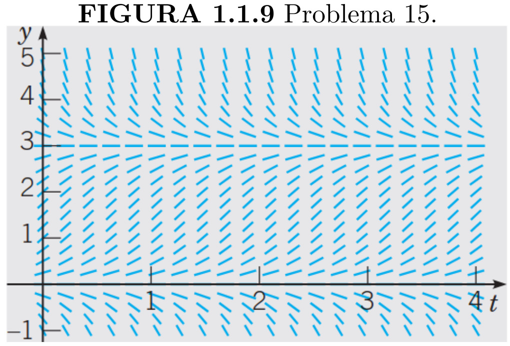
Solução:
Nesse caso, temos uma solução estacionária instável em $y^* = -2$. A partir da análise da inclinação das linhas de campo, que $y' > 0$ para $y > y^*$ e que $y' < 0$ para $y < y^*$. Esse comportamento é encontrado em:

$$\textbf{b. } y' = 2 + y$$

■

15. O campo de direções na Figura 1.1.9.

FIGURA 1.1.9 Problema 15.



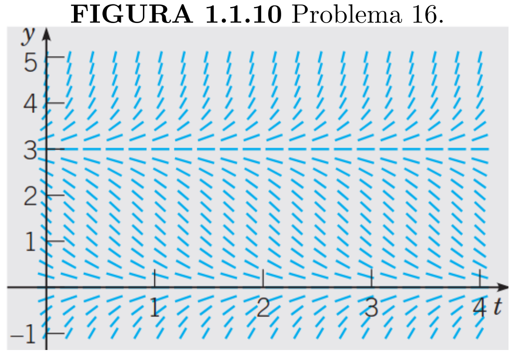
Solução:
O Campo de direções da figura indica a existência de duas soluções estácionárias: uma solução instável em $y^* = 0$ e uma solução estável em $y^{**} = 3$. Da análise do sinal das linhas de campo, temos $y' < 0$ para $y < y^*$; $y' > 0$ para $y^* < y < y^{**}$ e $y' < 0$ para $y > y^{**}$. Esse comportamento ocorre em

$$\textbf{h } y' = y(3 - y)$$

Solução:

16. O campo de direções na Figura 1.1.10.

FIGURA 1.1.10 Problema 16.



Solução:

O Campo de direções da figura indica a existência de duas soluções estácionárias: uma solução estável em $y^* = 0$ e uma solução instável em $y^{**} = 3$. Da análise do sinal das linhas de campo, temos $y' > 0$ para $y < y^*$; $y' < 0$ para $y^* < y < y^{**}$ e $y' > 0$ para $y > y^{**}$. Esse comportamento ocorre em

$$\mathbf{e}\ y' = y(y-3)$$

Solução:

17. Uma lagoa contém, inicialmente, 1.000.000 de galões (aproximadamente 4.550.00 litros) de água e uma quantidade desconhecida de um produto químico indesejável. A lagoa recebe água contento 0,01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água na lagoa permanece constante. Suponha que o produto químico está distribuído uniformemente na lagoa.

a. Escreva uma equação diferenciao para a quantidade de produto químico la lagoa em um instante qualquer.

Solução:

Seja $a(t)$ a quantidade de protuto químico (em gramas) presente na lagoa no instante de tempo t (em horas). A taxa de variação da quantidade de produto é dada por

$$\frac{da}{dt} = \text{taxa de entrada do produto} - \text{taxa de saída do produto}$$

em que a taxa de entrada é igual a

$$0,01 \text{ grama/galão} \times 300 \text{ galões/hora} = 3 \text{ grama/hora}.$$

Para determinarmos a taxa de saída, observemos que no instante t, teremos a quantidade a de produto uniformemente distribuida nos 1.000.000 galões de água da lagoa, saindo à mesma taxa de 300 galões por hora, ou seja, a taxa de saída será:

$$\frac{a \text{ grama}}{1.000.000 \text{ galões}} \times 300 \text{ galões/hora} = (3 \times 10^{-4})a \text{ grama/hora}$$

Portanto, a equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{da}{dt} = \text{taxa de entrada do produto} - \text{taxa de saída do produto}$$
$$\frac{da}{dt} = 3 - (3 \times 10^{-4})a$$

■

b. Qual a quantidade de produto químico que estará presente na lagoa apósum período muito longo de tempo? Essa quantidade limite depende da quantidade presente inicialmente?

Solução:
Depois de um longo período de tempo, a quantidade de produto químico na lagoa será a^*, tal que $\frac{da}{dt}(a^*) = 0$, Então,

$$\frac{da}{dt}(a^*) = 0 \Rightarrow 3 - (3 \times 10^{-4})a^* = 0 \Rightarrow a^* = \frac{3}{3 \times 10^{-4}} = 10^4 \text{ gramas de produto químico}$$

O resultado acima independe da quantidade inicial visto que a solução a^* é estável, visto que $da/dt < 0$ para $a > a^*$ e $da/dt > 0$ para $a < a^*$. ■

c. Escreva uma equação diferencial para a concentração do produto químico na lagoa em qualquer instante de tempo t. *Sugestão:* a concentração é $c = a/v = a(t)/10^6$.

Solução:

$$\begin{aligned}
c = \frac{a}{10^6} &\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{1}{10^6}\frac{da}{dt} \\
&\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{1}{10^6}\left[3 - (3 \times 10^{-4})a\right] \\
&\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{1}{10^6}\left[3 - (3 \times 10^{-4})(10^6 c)\right] \\
&\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{1}{10^{-6}}\left(3 - 300c\right) \\
&\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{300}{10^6}\left(10^{-2} - c\right) \\
&\Rightarrow \frac{dc}{dt} = 3 \times 10^{-8}\left(10^{-2} - c\right)
\end{aligned}$$

■

18. Uma gota de chiva esférica evapora a uma taxa proporcional à sua área de superficie. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.

Solução:
Seja $V = V(t)$ o volume da gota de água no instante de tempo t. De a cordo com a situação descrita, a taxa de variação do volume é dada por:

$$\frac{dV}{dt} = -kS$$

em que $S = S(t)$ é a área superficial da conta, k é uma constante positiva. O sinal negativo indica que a gota de chuva perde volume com o tempo no processo de evaporação. Vamos relacionar a área superficial e o volume da gota. Seja r o raio da gota. Então,

$$\begin{cases} S = 4\pi r^2 \\ V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^3 = (4\pi r^2)^3 = 64\pi^3 r^6 \\ V^2 = \left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)^2 = \dfrac{16}{9}\pi^2 r^6 \end{cases} \Rightarrow \frac{S^3}{V^2} = \frac{64\pi^3 r^6}{\frac{16}{9}\pi^2 r^6} \Rightarrow \frac{S^3}{V^2} = \frac{9}{4}\pi$$

$$\Rightarrow S^3 = \frac{9\pi}{4}V^2 \Rightarrow S = \sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi}V^{2/3}$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = -k\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi}V^{2/3}\right) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -CV^{2/3}$$

em que $C = k\sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi}$ é uma constante. ■

19. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a de seu meio ambiente (na maioria dos casos, a temperatura do ar ambiente). Suponha que a temperatura ambiente é de 70 ºF (cerca de 20 º C) e que a taxa constante é 0,05 $(\text{min})^{-1}$, Escreva uma equaçã diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante de tempo. Note que a equação diferencial é a mesma independentemente se a temperatura do objeto está acima ou abaixo da temperatura ambiente.

Solução:
Seja $T = T(t)$ a temperatura do objeto no instante de tempo t e T_a a temperatura do meio mabiente. Temos dois casos a considerar:

i. Se $T > T_a$, o objeto perde calor para o meio. Consequentemente, sua temperatura tende a diminuir, ou seja, $\frac{dT}{dt} < 0$. A equação diferencial assume a forma:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

em que k é uma constante positiva.

ii. Se $T < T_a$, o objeto recebe calor do ambiente. Nesse caso, sua temperatura tende a aumentar, ou seja, $\frac{dT}{dt} > 0$. A equação diferencial será:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_a - T) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

em que k é uma constante positiva.

iii. Se $T = T_a$, o objeto está em equilíbrio térmico com o meio e não há trocas de calor $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$. Ainda nesse caso, vale a expressão:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a).$$

■

20. Determinado remédio está sendo injetado na veia de um paciente hsopitalizado. O líquido, contento 5 mg/cm^3 do remédio, entra na corrente sanguínea do paciente a uma taza de 100 cm^3/h. O remédio é absorvido pelos tecidos do corpo, ou deixa a corrente sanguínea de outro modo, a uma taxa proporcional à quantidade presente, com um coeficiente de proporcionalidade igual a 0,4/h.

a. Supondo que o remédio esteja sempre distribuído uniformemente na corrente sanguínea, escreva uma equação diferencial para a quantidade de remédio presente na corrente sanguínea em qualquer instante de tempo.

Solução:
Seja $Q = Q(t)$ a quantidade de medicamento presente na corrente sanguínea no instante de tempo t. A taxa de variação $\frac{dQ}{dt}$ é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \text{Taxa de entrada} - \text{Taxa de saída}$$

em que

- Taxa de entrada $= c_0 \cdot v$, em que $c_0 = 5$ mg/cm^3 é a concentração inicial de remédio injetado e $v = 100$ cm^3/h é a vazão de entreda.
- Taxa de saída $= kQ$, em que $k = 0,4$ h é o coeficiente de proporcionalidade.

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= c_0 v - kQ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 5 \cdot 100 - 0,4Q \\ \frac{dQ}{dt} &= 500 - 0,4Q\end{aligned}$$

em que Q é dada em mg e t em h. ■

b. Quanto do remédio continua presente na corrente sanguínea após muito tempo?

Solução:

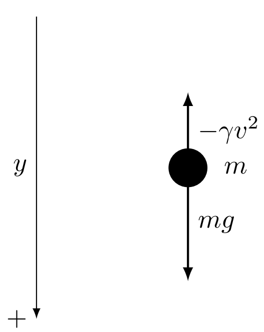
$$\frac{dQ}{dt}(Q^*) = 0 \Rightarrow 500 - 0,4Q^* = 0 \Rightarrow Q^* = 1250 \text{ mg}$$

■

21. Para objetos pequenos, caindo devagar, a hipótese sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores, caindo mais rapidamente, uma hipótese mais precisa é a de que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velicidade.

a. Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto de massa m em queda, supondo que a magnitue da força de resistência do ar é proporcional ap quadrado da velocidade e que o sentido dessa força é oposto ao da velocidade.

Solução:



Aplicando a segunda lei de Newton, com aceleração igual a $a = \dfrac{dv}{dt}$, temos:

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg - \gamma v^2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = \gamma\left(\frac{mg}{\gamma} - v^2\right) \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{\gamma}\right)\end{aligned}$$

■

b. Determine a velocidade limite após um longo período de tempo.

Solução:
Depois de um longo período de tempo

$$\frac{dv}{dt} \to 0 \Rightarrow -\frac{\gamma}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{\gamma}\right) \to 0 \Rightarrow v^2 \to \frac{mg}{\gamma} \Rightarrow v \to \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$$

■

c. Se $m = 10$ kg, encontre o coeficiente de resistência do ar de modo que a velocidade limite seja 49 m/s.

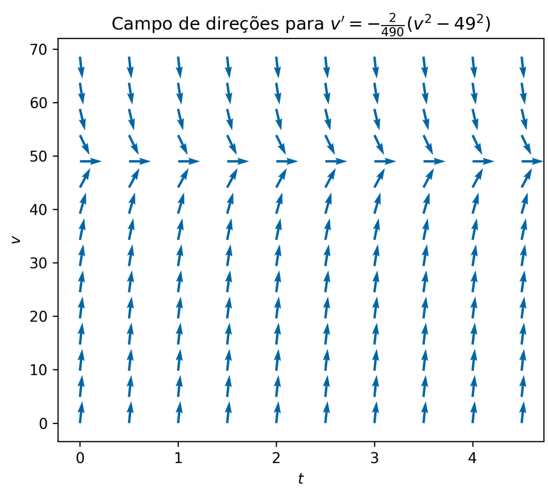
Solução:

$$v^2 = \frac{mg}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{mg}{v^2} \Rightarrow \gamma = \frac{10 \cdot 9,8}{49^2} = \frac{2}{49} \approx 0,041 \text{ kg/m}.$$

■

d. Usando os dados em (c), desenhe um campo de direções e compare-o com a Figura 1.1.3.

Solução:

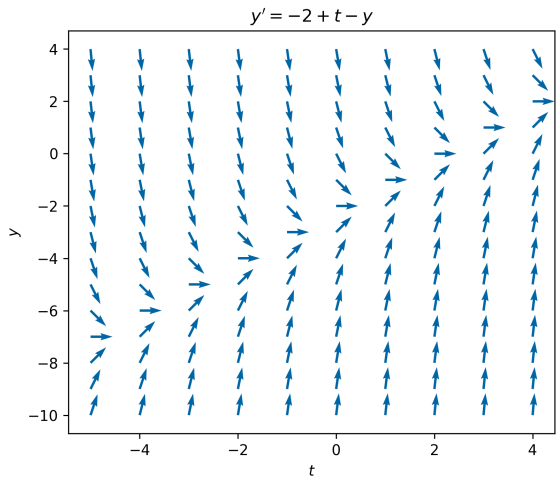


■

Em cada um dos Problemas de 22 a 25, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y quanto $t = 0$, descreva essa dependência. Note que a expressão à direita do sinal de igualdade nessas equações depende de t, além de y; portanto, sulas oluções podem exibir um comportamento mais complicado do que as do texto.

22. $y' = -2 + t - y$

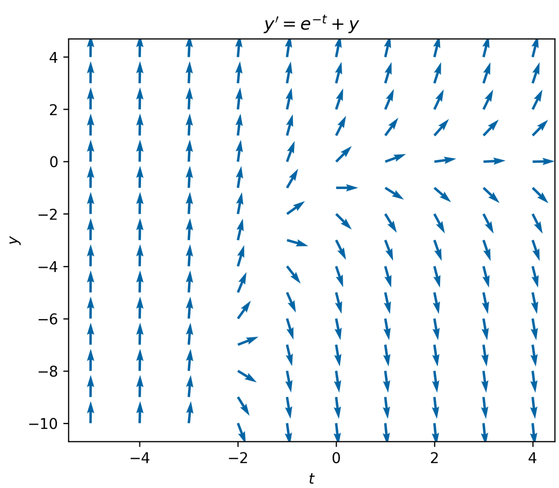
Solução:



■

23. $y' = e^{-t} + y$

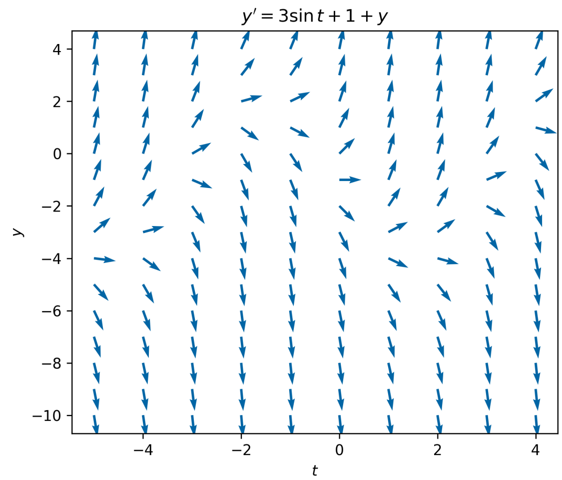
Solução:



■

24. $y' = 3\sin t + 1 + y$

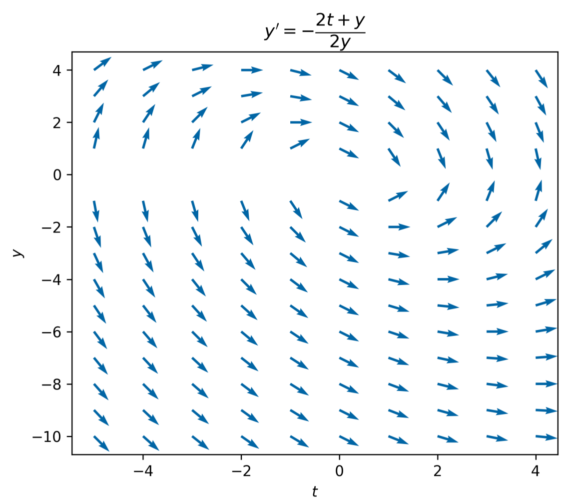
Solução:



■

25. $y' = -\dfrac{2t + y}{2y}$

Solução:



■

PROBLEMAS

1. Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0. Depois descreva, em pouvas palavras, as semelhanças e diferenças entre as soluções.

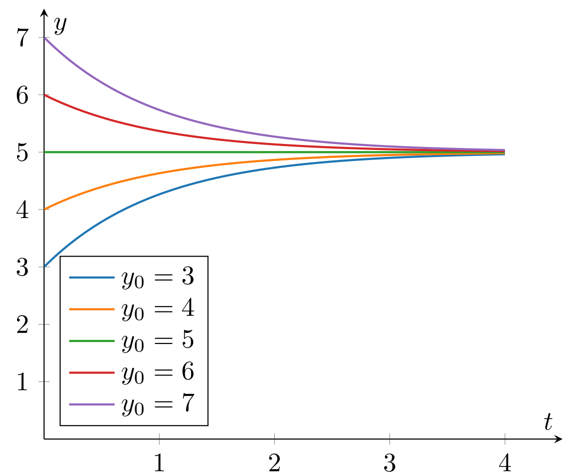
a. $dy/dt = -y + 5, \; y(0) = y_0$

Solução:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -y + 5 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -(y-5) \Rightarrow \frac{dy}{y-5} = -dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y-5} = -\int_0^t dt \Rightarrow \ln|y-5|\Big|_{y_0}^{y} = -t\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln|y-5| - \ln|y_0 - 5| = -t \Rightarrow \ln\left|\frac{y-5}{y_0-5}\right| = -t$$

$$\Rightarrow \frac{y-5}{y_0-5} = e^{-t} \Rightarrow y = 5 + (y_0 - 5)e^{-t}$$



■

b. $dy/dt = -2y + 5, \; y(0) = y_0$

Solução:

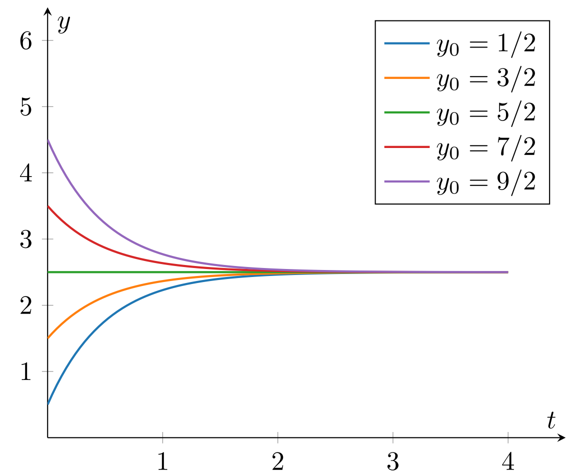
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y + 5 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\left(y - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{y - \frac{5}{2}} = -2dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y-\frac{5}{2}} = -2\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln\left|y - \frac{5}{2}\right|\Big|_{y_0}^{y} = -2t\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln\left|y - \frac{5}{2}\right| - \ln\left|y_0 - \frac{5}{2}\right| = -2t \Rightarrow \ln\left|\frac{y-\frac{5}{2}}{y_0 - \frac{5}{2}}\right| = -2t$$

$$\Rightarrow \frac{y - \frac{5}{2}}{y_0 - \frac{5}{2}} = e^{-2t} \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \left(y_0 - \frac{5}{2}\right)e^{-2t}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2} + \left(y_0 - \frac{5}{2}\right)e^{-2t}$$



■

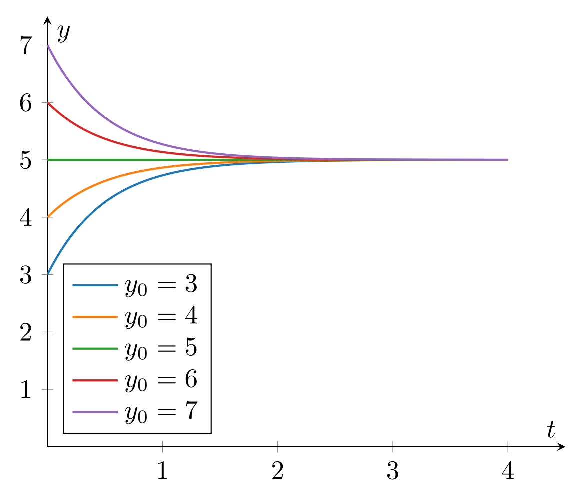
2. $dy/dt = -2y + 10, \ y(0) = y_0$

Solução:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y + 10 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2(y-5) \Rightarrow \frac{dy}{y-5} = -2dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y-5} = -2\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln|y-5|\Big|_{y_0}^{y} = -2t\Big|_0^t \Rightarrow \ln\left|\frac{y-5}{y_0-5}\right| = -2t$$

$$\Rightarrow y = 5 + (y_0 - 5)e^{-2t}$$



■