Resolução de Problemas do Livro

Física: um curso universitário. Vol. I - Mecânica (Alonso, M.; Finn, E. J.)

por

Igo da Costa Andrade

Referência
ALONSO, M.; FINN, E. J.. **Física**: um curso universitário. Vol. I - Mecânica. Rio de Janeiro, Editora Blucher, 2011.

Capítulo 2: Medidas e Unidades

2.1. As massas atômicas, representadas na Tab. A.1, são expressas em *unidades de massa atômica*, abreviadas por u. 1 u é igual a $1,6604 \times 10^{-27}$ kg. Calcule, em quilogramas em em gramas, as massas de (a) um átomo de hidrogênio e (b) um átomo de oxigênio.

Solução:

(a) Hidrogênio

$$m_{kg} = \frac{1,6604 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} \times m_u \Rightarrow m_{kg} = \frac{1,6604 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} \times 1,00797\ \text{u}$$
$$\Rightarrow m_{kg} = 1,674 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

(b) Oxigênio

$$m_{kg} = \frac{1,6604 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} \times m_u \Rightarrow m_{kg} = \frac{1,6604 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} \times 15,9994\ \text{u}$$
$$\Rightarrow m_{kg} = 2,657 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

■

2.2. Quantas moléculas, cada uma composta por um átomo de oxigênio e dois de hidrogênio, existem num grama de água? Quantas existem em 18 gramas? Quantas em um centímetro cúbico?

Solução:
Conforme problema 2.1, sejam $m_H = 1,674 \times 10^{-27}$ kg e $m_O = 2,657 \times 10^{-26}$ kg, as massas de um átomo de Hidrogênio (H) e um átomo de Oxigênio (O), respectivamente. Assim, a massa de uma molécula de água, composta por 2 átomos H e um átomo O é:

$$m_{H_2O} = 2 \cdot 1,674 \times 10^{-27} + 2,657 \times 10^{-26} = 2,991 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Portanto, em 1 grama (10^{-3} kg) de água, temos:

$$N_{1g} = \frac{10^{-3}}{m_{H_2O}} = \frac{10^{-3}}{2,991 \times 10^{-26}} = 3,34 \times 10^{22}\ \text{moléculas}$$

Em 18 gramas de água, teremos:

$$N_{18g} = 18 \text{ g} \cdot \frac{N_{1g} \text{ moléculas}}{1 \text{ grama}} = 18 \cdot 3,343 \times 10^{22} = 6,02 \times 10^{23} \text{ moléculas}$$

Finalmente, sabendo que a densidade da água é 1 g/cm^3, em 1 cm^3 haverá $3,34 \times 10^{22}$ moléculas de água.

■

2.3. Na Seç. 2.3 foi mencionado que quilograma poderia ser definido como sendo igual à massa de $5,0188 \times 10^{25}$ átomos so isótopo ^{12}C, cuja massa é definida como sendo exatamente 12,0000 u. Verifique se essa definição é compatível com o valor de u dado no Prob. 2.1.

Solução:

$$\frac{m_{kg}}{m_u} = \frac{1 \text{ kg}}{5,0188 \times 10^{25} \text{ átomos} \times 12,0000 \text{ u / átomo}} = 1,6604 \times 10^{-27} \text{ kg/u}$$

■

2.4. Considere as moléculas de hidrogênio, de oxigênio e de nitrogênio, cada uma delas composta por dois átomos idênticos. Calcule o número de moléculas de cada um desses gases, nas condições normais de pressão e temperatura (TPN) existentes em 1 m^3. Use os valores das densidades relativas dadas na Tab. 2.2. Faça uma extensão do seu cálculo que seja válida para outros gases. Qual é a conclusão que você pode tirar dos seus resultados?

Solução:
Sejam ρ, a densidade do gás em kg/m^3, m, a massa de cada molécula, em kg. Então, a quantidade N de moléculas por unidade de volume é tal que:

$$\rho = \frac{N \times m}{1} \Rightarrow N = \frac{\rho}{m}$$

Para cada um dos gases listados, temos:

(i) Hidrogênio (H_2) Cada molécula de gás tem massa de cada molécula:

$$\begin{aligned} m_{H_2(kg)} &= 2 \times m_{H_2(u)} \times u = 2 \times 1,00797 \text{ kg/u} \times 1,6604 \times 10^{-27} \text{ u} \\ &= 3,3473 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

e densidade igual a $\rho_{H_2} = 8,988 \times 10^{-5}$ kg/m^3. Portanto, a quantidade de moléculas em 1 metro cúbico é igual a:

$$N_{H_2} = \frac{\rho_{H_2}}{m_{H_2}} = \frac{8,988 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3}{3,347 \times 10^{-27} \text{ kg/molécula}} = 2,685 \times 10^{22} \text{ moléculas/m}^3$$

(ii) Oxigênio (O_2) Cada molécula de gás tem massa de cada molécula:

$$\begin{aligned} m_{O_2(kg)} &= 2 \times m_{O_2(u)} \times u = 2 \times 15,9994 \text{ kg/u} \times 1,6604 \times 10^{-27} \text{ u} \\ &= 5,3131 \times 10^{-26} \text{ kg} \end{aligned}$$

e densidade igual a $\rho_{O_2} = 1,429 \times 10^{-3}$ kg/m^3. Portanto, a quantidade de moléculas em 1 metro cúbico é igual a:

$$N_{O_2} = \frac{\rho_{O_2}}{m_{O_2}} = \frac{1,429 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3}{5,313 \times 10^{-26} \text{ kg/molécula}} = 5,378 \times 10^{18} \text{ moléculas/m}^3$$

(iii) Nitrogênio (N_2) Cada molécula de gás tem massa de cada molécula:

$$\begin{aligned} m_{N_2(kg)} &= 2 \times m_{N_2(u)} \times u = 2 \times 14,0067 \text{ kg/u} \times 1,6604 \times 10^{-27} \text{ u} \\ &= 4,6513 \times 10^{-26} \text{ kg} \end{aligned}$$

e densidade igual a $\rho_{N_2} = 1,2506 \times 10^{-3}$ kg/m^3. Portanto, a quantidade de moléculas em 1 metro cúbico é igual a:

$$N_{N_2} = \frac{\rho_{N_2}}{m_{N_2}} = \frac{1,2506 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3}{4,651 \times 10^{-26} \text{ kg/molécula}} = 2,151 \times 10^{19} \text{ moléculas/m}^3$$

Os resultados acima parecem indicar que, nas condições normais de pressão e temperatura (TPN), a quantidade de moléculas de gás por unidade de volume é uma constante, nesse caso, aproximadamente igual a $2,69 \times 10^{22}$ moléculas por metro cúbico. ■

2.5. Admitindo-se que o ar é composto por 20% de oxigênio e 80% de nitrogênio, e que esses gases formam moléculas diatômicas, calcule a massa molecular "efetiva" do ar. Avalie o múmero de moléculas em 1 cm^3 de ar nas condições TPN. Quantas moléculas são de oxigênio e quantas são de nitrogênio?

Solução:

Primeira Parte: Seja N_{Ar} a quantidade de moléculas de ar presentes em um dado volume V. Supondo que o ar é composto por 20% de oxigênio e 80% de nitrogênio, temos:

$$N_{Ar} = N_{O_2} + N_{N_2},$$

em que $N_{O_2} = 0,2N_{Ar}$ é a quantidade de moléculas (diatômicas) de Oxigênio e $N_{N_2} = 0,8N_{Ar}$ é a quantidade de moléculas (diatômicas) de Nitrogênio. Por outro lado, a massa total de ar é

$$M_{Ar} = N_{O_2} \cdot m_{O_2} + N_{N_2} \cdot m_{N_2},$$

onde m_{O_2} e m_{N_2} são respectivamente as massas moleculares do Oxigênio e do Nitrogênio. Portanto, a massa molecular do ar será:

$$\begin{aligned} m_{Ar} &= \frac{M_{Ar}}{N_{Ar}} = \frac{N_{O_2} \cdot m_{O_2} + N_{N_2} \cdot m_{N_2}}{N_{Ar}} = \frac{N_{O_2}}{N_{Ar}} m_{O_2} + \frac{N_{N_2}}{N_{Ar}} m_{N_2} \\ m_{Ar} &= 0,2m_{O_2} + 0,8m_{N_2} \end{aligned}$$

Em unidades de massa atômica (u) e em quilogramas (kg), temos:

$$\begin{aligned} m_{Ar} &= 0,2 \cdot (2 \cdot 15,9994) + 0,8 \cdot (2 \cdot 14,0067)) = 28,81 \text{ u/molécula} \\ &= (28,81 \text{ u/molécula}) \cdot (1,6604 \times 10^{-27} \text{ kg/u}) = 4,784 \times 10^{-26} \text{ kg/molécula} \end{aligned}$$

Segunda Parte: Seja $M_{Ar} = M_{O_2} + M_{N_2}$ massa total de ar em um volume V em função das massas de oxigênio (M_{O_2}) e nitrogênio (M_{N_2}). Dividindose por V, e considerando que 20% do ar é composto de oxigênio e 80%, de nitrogênio, temos:

$$\begin{aligned} \frac{M_{Ar}}{V} = \frac{M_{O_2} + M_{N_2}}{V} &\Rightarrow \frac{M_{Ar}}{V} = \frac{M_{O_2}}{V} + \frac{M_{N_2}}{V} \\ &\Rightarrow \frac{M_{Ar}}{V} = 0,2\frac{M_{O_2}}{0,2V} + 0,8\frac{M_{N_2}}{0,8V} \\ &\Rightarrow \frac{M_{Ar}}{V} = 0,2\rho_{O_2} + 0,8\rho_{N_2} \end{aligned}$$

Na última passagem, observamos o fato de que $\dfrac{M_{O_2}}{0,2V}$ é a massa específica do oxigênio ρ_{O_2} e $\dfrac{M_{N_2}}{0,8V}$ é a massa específica do nitrogênio ρ_{N_2}.
Lembrando que na primeira parte deste problema determinamos a massa molecular do ar como $m_{Ar} = \dfrac{M_{Ar}}{N_{Ar}} \Rightarrow M_{Ar} = m_{Ar}N_{Ar}$, podemos determinar a quantidade de moléculas de ar por unidade de volume da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{M_{Ar}}{V} = 0,2\rho_{O_2} + 0,8\rho_{N_2} &\Rightarrow \frac{m_{Ar}N_{Ar}}{V} = 0,2\rho_{O_2} + 0,8\rho_{N_2} \\
&\Rightarrow \frac{N_{Ar}}{V} = \frac{0,2\rho_{O_2} + 0,8\rho_{N_2}}{m_{ar}} \\
&\Rightarrow \frac{N_{Ar}}{V} = \frac{0,2\cdot\left(1,429\times10^{-3}\ \text{g/cm}^3\right) + 0,8\cdot\left(1,251\times10^{-3}\ \text{g/cm}^3\right)}{(4,784\times10^{-26}\ \text{kg/molécula})\cdot(1000\ \text{g/kg}))} \\
&\Rightarrow \frac{N_{Ar}}{V} = \frac{\left(2,858\times10^{-4}\ \text{g/cm}^3\right) + \left(1\times10^{-3}\ \text{g/cm}^3\right)}{4,784\times10^{-23}\ \text{g/molécula}} \\
&\Rightarrow \frac{N_{Ar}}{V} = \frac{1,286\times10^{-3}\ \text{g/cm}^3}{4,784\times10^{-23}\ \text{kg/molécula}} \\
&\Rightarrow \frac{N_{Ar}}{V} = 2,689\times10^{19}\ \text{moléculas/cm}^3
\end{aligned}
$$

Do total teremos

$$
\begin{aligned}
N_{O_2} &= 0,2\cdot N_{Ar} = 0,2\cdot 2,689\times10^{19} = 5,378\times10^{18}\ \text{moléculas de oxigênio; e} \\
N_{N_2} &= 0,8\cdot N_{Ar} = 0,8\cdot 2,689\times10^{19} = 2,151\times10^{19}\ \text{moléculas de nitrogênio}
\end{aligned}
$$

■

2.6. A densidade do gás interestelar na nossa galáxia é avaliada em cerca de 10^{-21} kg/m^{-3}. Admitindo-se que esse gás é constituído principalmente de hidrogênio, avalie o número de átomos de hidrgênio por cm^3. Compare esse resultado com o correspondente obtido para o ar nas condições TPN (Prob. 2.5).

Solução:
Em um volume V, teremos a massa $M = \rho\cdot V = m_H\cdot N$, em que $\rho = 10^{-21}$ kg/m^3 é a densidade do gás interestelar, $m_H = 1,674\times10^{-27}$ kg/molécula é a massa molecular do átomo de hidrogênio e N é a quantidade de moléculas presentes no volume V. Assim,

$$
\begin{aligned}
M = \rho\cdot V = m_H\cdot N &\Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{\rho}{m_H} = \frac{1\times10^{-21}\ \text{kg/m}^3}{1,674\times10^{-27}\ \text{kg/molécula}} \\
&\Rightarrow \frac{N}{V} = 5,975\times10^{5}\ \text{moléculas/m}^3 \approx 0,6\ \text{moléculas/cm}^3
\end{aligned}
$$

■

2.7. Um como de 2 cm de raio contém água. Em duas horas, o nível da água baixa 1mm. Avalie, em gramas por hora, a velocidade de evaporação da água. Quantas moléculas de água estão se evaporando por secundo em cada centímetro quadrado da superfície da água? (Sugerimos que o estudante realize esta experiência e obtenha seus próprios dados. Por que você obtém resultados diferentes cada dia?).

Solução:
Consideremos que em um intervalo de tempo Δt, a quantidade de massa de água evaporada seja $\Delta m = \rho_{H_2O}\Delta V$, em que $\rho_{H_2O} = 1$ g/cm^3 é a densidade da água e ΔV é o volume de água evaporado. Para

um copo cilíndrico de raio $r = 2$ cm, se a altura do copo baixa $\Delta h = 1$ mm $= 0,1$ cm em $\Delta t = 2$ horas, a velocidade v de evaporação será:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho_{H_2O}\Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho_{H_2O}\left(\pi r^2 \Delta h\right)}{\Delta t} \\
v &= \pi r^2 \rho_{H_2O}\frac{\Delta h}{\Delta t} \\
v &= \pi \cdot (2\ \text{cm})^2 \cdot \left(1\ \text{g/cm}^3\right) \cdot \frac{0,1\ \text{cm}}{2\ \text{h}} \\
v &= 0,628\ \text{g/h}
\end{aligned}$$

Sabendo que a massa molecular da água é

$$\begin{aligned}
m_{H_2O} = 2 \cdot m_H + m_O &= 2 \cdot \left(1,674 \times 10^{-27}\ \text{kg/molécula}\right) + \left(2,657 \times 10^{-26}\ \text{kg/molécula}\right) \\
&= 2,991 \times 10^{-26}\ \text{kg/molécula} \\
&= 2,991 \times 10^{-23}\ \text{g/molécula}
\end{aligned}$$

Retornemos à equação básica para a taxa de evaporação $v = \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$. Seja $\Delta m = m_{H_2O} \cdot \Delta N$, em que $m_{H_2O} = 2,991 \times 10^{-26}$ kg/molécula (Ver Probl. 2.2) e ΔN é a quantidade de moléculas que se evaporaram no intervalo de tempo Δt. Assim,

$$v = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{m_{H_2O}\Delta N}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{v}{m_{H_2O}}$$

Finalmente, a quantidade de moléculas se evaporando por segundo em cada cemtímetro quadrado da superfície da água é ($S = \pi r^2$)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta N}{S\Delta t} = \frac{v}{\pi r^2 \cdot m_{H_2O}} &= \frac{\left(0,6283\ \frac{\text{g}}{\text{h}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}}\right)}{\pi\,(2\ \text{cm})^2 \cdot (2,991 \times 10^{-26}\ \text{kg/molécula})} \\
&= 4,643 \times 10^{17}\ \text{moléculas} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}
\end{aligned}$$

■

2.8. Um *mol* de uma substância é definido como sendo uma quantidade dessa substância, expressa em *gramas*, numericamente igual à massa molecular dessa substância em u. (Quando nos referimos a um elemento químico, e não a um composto, usaremos massa atômica em vez de massa molecular.) Verifique que o número de moléculas (ou de átomos) em um mol de *qualquer* substância é sempre o mesmo e é igual a $6,0225 \times 10^{23}$. Este número, chamado *constante de Avogrado*, é uma constante física muito importante.

Solução:
Seja 1 u $= 1,6604 \times 10^{-27}$ kg $\Rightarrow$ 1 u $= 1,6604 \times 10^{-24}$ g. Consideremos uma substância (átomo ou molécula) cuja massa molecular em unidade de massa atômica seja $m = k$ u, em que K é uma constante positiva.
Nesse caso, considerando a definição dada, 1 *mol* dessa substância tem massa, em gramas, igual a $M = K$ g. A quantidadde de entidades(átomos ou moléculas) dessa substância será N_A tal que:

$$\begin{aligned}
M = m \cdot N_A \Rightarrow N_A = \frac{M}{m} &= \frac{K\ \text{g}}{(K\ \text{u/entidade}) \cdot \left(\frac{1,6604 \times 10^{-24}\ \text{g}}{1\ \text{u}}\right)} \\
&= \frac{1}{1,6604 \times 10^{-24}}\ \text{entidades} \\
&= 6,0226 \times 10^{23}\ \text{entidades (átomos ou moléculas)}
\end{aligned}$$

■

2.9. Usando os dados das Tabs 2.2 e A.1, avalie a separação média entre as moléculas nas condições TPN, no hidrogênio (gás), na água (líquido) e no ferro (sólido).

Solução:
Consideremos determinada quantidade de substância de densidade ρ, ocupando um volume V. A massa presente nesse volume é $M = m \cdot N$ em que m é a massa molecular e N é a quantidade de moléculas presentes. Determinemos o volume médio por molécula (V/N):

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \rho = \frac{m \cdot N}{V} \Rightarrow \frac{V}{N} = \frac{m}{\rho}$$

Modelo Cúbico: Consideremos que esse volume médio por molécula seja um cubo de lado l. Assim, a distância média entre as moléculas será:

$$l = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} \Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$$

Aplicando a fórmula acima às substâncias dadas, temos:

Hidrogênio:

$$l = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3,347 \times 10^{-27} \text{ kg}}{0,08988 \text{ kg/m}^3}} = \sqrt[3]{3,724 \times 10^{-26} \text{ m}^3} = 3,34 \times 10^{-9} \text{ m}$$

Água:

$$l = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{2,991 \times 10^{-26} \text{ kg}}{1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = \sqrt[3]{2,991 \times 10^{-29} \text{ cm}^3} = 3,104 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Ferro:

$$l = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{9,273 \times 10^{-26} \text{ kg}}{7,86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = \sqrt[3]{1,18 \times 10^{-29} \text{ m}^3} = 2,276 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Modelo esférico: Consideremos que o volume médio por molécula seja uma esfera de diâmetro D. Assim, a distância média entre as moléculas será:

$$\frac{V}{N} = \frac{\pi D^3}{6} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{V}{N}} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{m}{\rho}}$$

Aplicando a fórmula acima às substâncias dadas, temos:

Hidrogênio:

$$D = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{3,347 \times 10^{-27} \text{ kg}}{0,08988 \text{ kg/m}^3}} = 4,14 \times 10^{-9} \text{ m}$$

Água:

$$D = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{2,991 \times 10^{-26} \text{ kg}}{1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 3,851 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Ferro:

$$D = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{9,273 \times 10^{-26} \text{ kg}}{7,86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 2,824 \times 10^{-10} \text{ m}$$

■